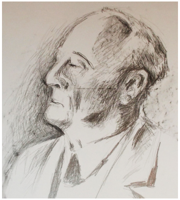
Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

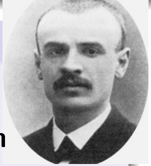
Faculty of Mathematics, University of Białystok



Wykład 12

Twierdzenie Banacha-Steinhausa

Tw. (Twierdzenie Baire'a)



Przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych w przestrzeni metrycznej zupełnej jest zbiorem brzegowym

$$\left(\begin{array}{l} X \text{ przestrzeń metryczna zupełna} \\ A_n \subseteq X \text{ domknięty, ale } \operatorname{Int}(A_n) = \emptyset \end{array} \right) \implies \operatorname{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset.$$

Prz. Niech $X = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ z metryką $d(x, y) = |x - y|$ oraz $A_n = \{q_n\}$. Wtedy A_n domknięte, $\operatorname{Int}(A_n) = \emptyset$, ale $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. Czyli $\operatorname{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Dlaczego? (bo $\mathbb{Q}$ nie jest zupełna!)

Uw. Poprzez dualność między zbiorami otwartymi i domkniętymi Twierdzenie Baire'a można równoważnie sformułować następująco:

Przeliczalny przekrój otwartych zbiorów gęstych w przestrzeni zupełnej jest zbiorem gęstym, tzn.

$$\left(\begin{array}{l} X \text{ przestrzeń metryczna zupełna} \\ U_n \subseteq X \text{ otwarte i } \overline{U_n} = X \end{array} \right) \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n} = X.$$

Twierdzenie Banacha-Steinhausa

Niech X przestrzeń Banacha, a Y przestrzeń unormowana. Dla dowolnej rodziny $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq B(X,Y)$ operatorów ograniczonych

$$\forall_{x\in X} \sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \iff \sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty. \qquad \overset{\Longleftarrow}{\text{łatwe}}$$

Czyli $\forall_{x\in X}$ **rodzina $\{T_i x\}_{i\in I}$ jest ograniczona w Y *(punktowo)*** $\iff$ **rodzina $\{T_i\}_{i\in I}$ jest ograniczona w $B(X,Y)$ *(jednostajnie)***.

Dowód: '$\Longrightarrow$' Zbiory $A_n := \{x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i x\| \leqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$, są domknięte, bo T_i są ciągłe. Z założenia, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zatem z **Tw. Baire**'a istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $K(x_0,\varepsilon) \subseteq A_{n_0}$. Dla $x \in X$, $\|x\| = 1$, oraz $i \in I$ mamy

$$\|T_i x\| = \tfrac{2}{\varepsilon}\left\|T_i\left(\tfrac{\varepsilon}{2}x\right)\right\| = \tfrac{2}{\varepsilon}\left\|T_i\left(\left(x_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}x\right) - x_0\right)\right\|$$

$$\leqslant \tfrac{2}{\varepsilon}\left\|T_i\left(x_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}x\right)\right\| + \tfrac{2}{\varepsilon}\left\|T_i(x_0)\right\| \left\{ \begin{array}{l} x_0 + \frac{\varepsilon}{2}x \in K(x_0,\varepsilon) \subseteq A_{n_0} \\ x_0 \in K(x_0,\varepsilon) \subseteq A_{n_0} \end{array} \right\}$$

$$\leqslant \tfrac{2}{\varepsilon} n_0 + \tfrac{2}{\varepsilon} n_0 = \tfrac{4}{\varepsilon} n_0. \quad \text{Stąd } \sup_{i\in I} \|T_i\| \leqslant \tfrac{4}{\varepsilon} n_0 < \infty. \qquad \blacksquare$$

Wn. Granica punktowa ciągu operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha jest operatorem ograniczonym. Tzn.

$$\left(\begin{array}{l} \{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X,Y) \\ X \text{ przestrzeń Banacha} \\ \forall_{x\in X}\ \{T_n x\}_{n=1}^{\infty} \text{ zbieżny} \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} T \in B(X,Y),\ \text{gdzie} \\ \forall_{x\in X}\ Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x \end{array}\right)$$

Dowód: Jeśli $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny dla każdego $x \in X$, to kładąc $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ otrzymujemy operator liniowy, bo granica jest operacją liniową. Ponadto zbieżność ciągu $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ implikuje jego ograniczoność, dla każdego $x \in X$. Zatem na mocy Twierdzenia Banacha-Steinhausa mamy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Ponadto

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x\|.$$

Czyli T jest ograniczony oraz $\|T\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. ∎

Def. Niech X przestrzeń unormowana. **Słabą topologią** na X nazywamy najsłabszą topologią, przy której wszystkie funkcjonały z X^* są ciągłe. Bazą tej topologii są zbiory postaci

$$U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}(x) := \{y \in X : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

gdzie $x \in X$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$, $\varepsilon > 0$.

Uw. Jeżeli ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest **słabo zbieżny** (czyli zbieżny w słabej topologii) do $x_0 \in X$, to piszemy $x_n \xrightarrow{w} x_0$. Mamy

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \forall_{f \in X^*}\ f(x_n) \longrightarrow f(x_0).$$

Z Twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że granica słabo zbieżnego ciągu jest wyznaczona jednoznacznie – słaba topologia spełnia warunek Hausdorffa.

Uw. Topologia na X zadana przez normę jest mocniejsza od topologii słabej (stąd nazwa tej drugiej): $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 \implies x_n \xrightarrow{w} x_0$.

Prz. Jeśli $X = H$ przestrzeń Hilberta, to na mocy Twierdzenia Riesza-Frecheta każdy funkcjonał $f \in H^*$ jest postaci $f(x) = \langle x, y \rangle$, dla pewnego $y \in H$. Zatem dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ zachodzi

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \forall_{y \in H} \ \langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x_0, y \rangle.$$

Dla przykładu, rozważmy układ ortonormalny $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$. Wtedy

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle e_n, e_m \rangle + \|e_m\|^2 = 2, \qquad n \neq m.$$

Zatem $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny w normie. Jest zato słabo zbieżny:

$$e_n \xrightarrow{w} 0.$$

Rzeczywiście, dla dowolnego $y \in H$, z nierówności Bessela mamy $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_i, y \rangle|^2 \leqslant \|y\|^2$. Skoro szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_i, y \rangle|^2$ jest zbieżny, to $\langle e_i, y \rangle \to 0 = \langle 0, y \rangle$. Czyli $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Norma nie jest słabo ciągła, bo $\|0\| = 0 < 1 = \liminf_{n \to \infty} \|e_n\|$.

Tw1. Topologia słaba=topologia normowa $\iff \dim(X) < \infty$.

Tw2. X jest refleksywna $\iff \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ słabo zwarty.

Stw. Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony, tzn.

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ograniczony w normie.}$$

Ponadto, $\|x_0\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ *(norma jest słabo półciągła z dołu).*

Dowód: Każdy $x \in X \subseteq X^{**}$ możemy traktować jako funkcjonał $i(x)$ na przestrzeni X^*, gdzie $i(x)(f) = f(x)$. Wtedy $\|i(x)\| = \|x\|$ oraz

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \forall_{f\in X^*}\ i(x_n)(f) \longrightarrow i(x_0)(f).$$

Czyli słaba zbieżność ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest równoważna zbieżności punktowej ciągu funkcjonałów liniowych $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Na mocy **Tw. Banacha-Steinhausa**, ciąg $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^{**}$ jest ograniczony.

Na mocy **Tw. Hahna-Banacha** istnieje $f \in X^*$ taki, że $\|f\| = 1$ oraz $f(x_0) = \|x_0\|$. Stąd i ze słabej zbieżności

$$\|x_0\| = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f\|\|x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \qquad \blacksquare$$